SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Davor Šibenik

KOALICIJSKE IGRE S PRENOSIVOM KORISNOŠĆU

Diplomski rad

Zagreb, 2017

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Davor Šibenik

KOALICIJSKE IGRE S PRENOSIVOM KORISNOŠĆU

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Lavoslav Čaklović

Zagreb, 2017

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ______________________________ pred nastavničkim povjerenstvom u sastavu:

1. ____ , predsjednik

2. ____ , član

3. ____ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____

2. ____

3. ____

Sadržaj

Uvod

Od samog početka ljudske rase ljudi su formirali zajednice kako bi povećali svoje izglede za preživljavanje. Možemo dakle reći da su takve zajednice (*koalicije*) donosile pojedincima neku dodanu vrijednost. U ovom radu ćemo tu dodanu vrijednost nazvati *korisnost* te ju iskazati brojčano. Također ćemo pretpostaviti da je ona savršeno *djeljiva* i da se može *prenositi* između sudionika koalicije, što nije teško opravdati: u stvarnosti bi se to vrlo lako realiziralo novčanim transakcijama.

U tom svijetu pretpostavki prokomentirat ćemo i iskazati u kojim slučajevima se pojedincu isplati sklopiti pojedinu koaliciju, koje koalicije će doista biti formirane te ćemo prezentirati ideju *pravedne* podjele same korisnosti među sudionicima, jezgru (eng. *core*), te izdvojiti točku unutar nje, nukleolus (eng. *nucleolus*). Sve to bit će zorno prikazano na primjerima.

Iako je model vrlo jednostavan te pretpostavke jake, ova grana teorije igara ipak može naći svoje mjesto u modeliranju stvarnosti, počevši od jednostavnog primjera kao što je grupno naručivanje jela u restoranu, preko koalicija stanara pa sve do kompliciranih političkih koalicija. Slijedi nekoliko motivacijskih primjera, sad ćemo ih samo iskazati, a kasnije u radu detaljnije obraditi:

- Zamislimo da postoje tri grada koja se žele priključiti na obližnji izvor električne energije. Ako će se svaki grad izravno priključiti, suma pojedinačnih troškova će biti veća od troška da se svi priključe zajedno ili u parovima, tj. preko povezanih mreža. Postavljaju se pitanja: na koji način će se realizirati priključivanje (svi zajedno ili u parovima)? Na koji način će se raspodijeliti ušteda? Kako definirati *vrijednost* priključivanja pojedinog grada koaliciji?

- Pretpostavimo da trojica radnika posjeduju samo desnu rukavicu, a trojica samo lijevu. Pretpostavimo da par rukavica pridonosi neku vrijednost, dok samo jedna rukavica ne pridonosi ništa. Na koji način ćemo raspodijeliti vrijednost u slučaju udruživanja svih radnika?

- Zamislimo da Ivo, Zoran i Andrej imaju rezervirane termine kod zubara u ponedjeljak, utorak i srijedu, respektivno. Možda njima ti dani nisu idealni, možda preferiraju odlazak nekog drugog dana. U kojim slučajevima se Ivi, Zoranu i Andreju isplati formirati koaliciju i zamijeniti međusobno dogovorene termine?

- Znamo da se Vijeće sigurnosti UN-a sastoji od 5 stalnih članova (SAD, Rusija, Velika Britanija, Francuska i Kina) te 10 ostalih članova. Da bi Vijeće donijelo odluku potrebna je suglasnost od barem 9 članova, uz uvjet da to odobrava i svaki od 5 stalnih članova. Tu možemo definirati igru od 15 članova, uz dane korisnosti za određenu provedbu. Koje sve koalicije imaju smisla?

U ovom radu ćemo pretpostaviti da će se skoro uvijek formirati velika koalicija, tj. koalicija u koju je uključen svaki sudionik, a odgovorit ćemo na pitanje distribucije ušteda. Kao i većina teorija koje koriste maksimiziranje korisnosti, i koalicijske igre pate od *neizmjerivosti* korisnosti kod ljudi, ali ako se ograničimo samo na financijski aspekt, tj. distribuciju novca ili smanjivanje troška, koalicijske igre daju pristupačna i zadovoljavajuća rješenja predstavljenih problema.

1 Jezgra

Teorija igara proučava situacije nadmetanja i suradnje između više pojedinaca (*igrača*) koristeći matematičke metode. Kod koalicijskih igara, pretpostavka je da igrači mogu sklapati koalicije i da postoje dogovori koji se ne mogu kršiti. One ne pokazuju određene strategije igrača, već samo moguće koalicije te isplatu svake od njih. U igri s prenosivom korisnošću pretpostavljamo da se isplata ili zarada može izraziti kao jedan broj, i taj broj će nam predstavljati vrijednost koalicije. Također pretpostavljamo da se isplata može slobodno prenositi između članova koalicije u bilo kojem omjeru.

U ovom poglavlju definirat ćemo samu igru s prenosivom korisnošću te koncept imputacije i dominacije, a nakon toga definiramo dominacijsku jezgu te samu jezgru.

1.1 Imputacije i dominacija

Definicija 1.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}$ broj igrača te $N = \{1, ..., n\}$ skup igrača. Koalicijska igra s prenosivom korisnošću ili TU-igra (eng. Transferable utility) je par (N, v), gdje je v funkcija koja svakom $S \subseteq N$ pridružuje realni broj, tako da vrijedi $v(\emptyset) = 0$.*

Podskupovi S su zapravo sve moguće koalicije, a funkciju v zovemo *karakteristična funkcija.* $v(S)$ nazivamo *vrijednost* skupa (koalicije) S. Koaliciju N nazivamo *velika koalicija. Distribucija isplate* za koaliciju S je vektor realnih brojeva $(x_i)_{i\in S}$.

Skup koalicija označavamo sa 2^N. Tada je TU-igra par (N, v), $v : 2^N \to \mathbb{R}$ t.d. $v(\emptyset) = 0$. Ako je jasno koji je skup igrača, igru možemo označavati samo sa v. $|S|$ označava broj elemenata u koaliciji S. Za distribuciju isplate $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^N$ definiramo $x(S) := \sum_{i\in S} x_i$. U nastavku ćemo vrijednost koalicije često pisati bez vitičastih zagrada, npr. $v(1, 2)$, umjesto $v(\{1, 2\})$.

Definicija 1.2. *Neka je (N, v) TU-igra. Vektor $x \in \mathbb{R}^N$ nazivamo imputacija ako vrijedi:*
(a) x je individualno racionalan, tj.

$$x_i \geq v(i), \forall i \in N \tag{1.1.1}$$

(b) x je efikasan, tj.

$$x(N) = v(N) \tag{1.1.2}$$

Skup imputacija igre (N, v) označavamo sa $I(v)$. Vektor $x \in I(v)$ je distribucija isplate koja ima vrijednost jednaku vrijednosti velike koalicije, $v(N)$. Vektor x svakom igraču i daje isplatu x_i koja iznosi barem onoliko koliko bi dobio da ne ulazi ni u kakvu koaliciju.

Definicija 1.3. *Neka je (N, v) TU-igra tako da vrijedi $v(N) \geq \sum_{i=1}^n v(i)$. Tada (N, v) nazivamo esencijalna igra.*

Esencijalne igre su one u kojima je vrijednost velike koalicije veća nego suma vrijednosti jednočlanih koalicija. Primijetimo da vrijedi:

$$I(v) \neq \emptyset \Longleftrightarrow v(N) \geq \sum_{i=1}^{n} v(i) \tag{1.1.3}$$

Lijeva implikacija slijedi iz efikasnosti i individualne racionalnosti imputacije, a desna vrijedi jer je npr. vektor $(v(1), v(2), \ldots, v(n) + (v(N) - \sum_{i=1}^n v(i)))$ imputacija.

Propozicija 1.4. *Skup imputacija $I(v)$ esencijalne igre je konveksna ljuska točaka $f^1, f^2, ..., f^n$ za koje vrijedi $f_k^i := v(k)$ za $k \neq i$, $f_i^i := v(N) - \sum_{k \in N \setminus \{i\}} v(k)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je x iz konveksne ljuske. Tada vrijedi $x = \sum_i \lambda_i f^i$ uz $\sum_i \lambda_i = 1$. Dokazujemo $x \in I(v)$. Za neki i slijedi:
a)

$$\begin{aligned}
x_i &= \sum_k \lambda_k f_i^k \\
&= \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \lambda_k f_i^k + \lambda_i f_i^i \\
&= \sum_{k \in N \setminus \{i\}} \lambda_k v(i) + \lambda_i v(N) - \lambda_i \sum_{k \in N \setminus \{i\}} v(k) \\
&= (1 - \lambda_i) v_i + \lambda_i v(N) - \lambda_i \sum_{k \in N \setminus \{i\}} v(k) \\
&= v_i + \lambda_i (v(N) - \sum_{k \in N} v(k)) \geq v_i
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
x(N) &= \sum_{i \in N} x_i \\
&= \sum_{i \in N} [v_i + \lambda_i (v(N) - \sum_{k \in N} v(k))] \\
&= \sum_{i \in N} v_i + 1 \cdot (v(N) - \sum_{k \in N} v(k)) = v(N)
\end{aligned}$$

Dakle, x je iz skupa imputacija.
Dokazujemo drugi smjer: neka je $x \in I(v)$. Definiramo lambde:

$$\lambda_i = \frac{x_i - v(i)}{v(N) - \sum_k v(k)} \tag{1.1.4}$$

Slijedi:

$$\sum_i \lambda_i = \sum_i \frac{x_i - v(i)}{v(N) - \sum_k v(k)} = \frac{\sum_i x_i - \sum_i v(i)}{v(N) - \sum_k v(k)} = \frac{v(N) - \sum_i v(i)}{v(N) - \sum_k v(k)} = 1$$

Nadalje, imamo:

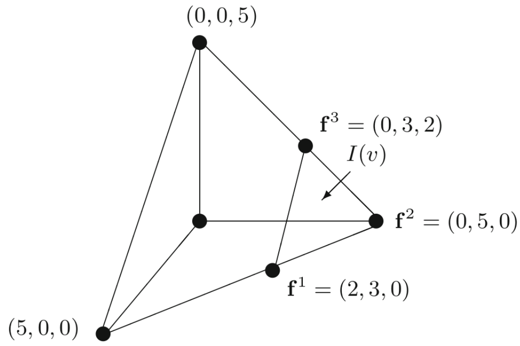
$$\begin{aligned}
\sum_k \lambda_k f_i^k &= \sum_k \frac{x_k - v(k)}{v(N) - \sum_j v(j)} f_i^k \\
&= \sum_{k \neq i} \frac{x_k - v(k)}{v(N) - \sum_j v(j)} v(i) + \frac{x_i - v(i)}{v(N) - \sum_j v(j)} (v(N) - \sum_{j \neq i} v(j)) \\
&= \sum_{k \neq i} \frac{x_k - v(k)}{v(N) - \sum_j v(j)} v(i) + \frac{x_i - v(i)}{v(N) - \sum_j v(j)} (v(N) - \sum_j v(j) + v(i)) \\
&= \frac{\sum_{k \neq i} (x_k - v(k))}{v(N) - \sum_j v(j)} v(i) + x_i - v(i) + \frac{x_i - v(i)}{v(N) - \sum_j v(j)} v(i) \\
&= \frac{\sum_k (x_k - v(k))}{v(N) - \sum_j v(j)} v(i) + x_i - v(i) \\
&= 1 \cdot v(i) + x_i - v(i) \\
&= x_i
\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da se svaka imputacija x može pokazati kao konveksna kombinacija vektora $f^1, \ldots, f^n$.

$\square$

Primjer 1.5

Neka je (N, v) TU-igra sa tri igrača uz vrijednosti koalicija $v(1) = v(3) = 0$, $v(2) = 3$, $v(1, 2, 3) = 5$. Tada je $I(v)$ trokut sa vrhovima $f^1 = (2, 3, 0)$, $f^2 = (0, 5, 0)$, $f^3 = (0, 3, 2)$.



Slika 1.1: Rješenje iz primjera

Definicija 1.6. *Neka je (N, v) TU-igra. Neka su $y, z \in I(v)$, $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$. Tada kažemo da y dominira z preko (koalicije) S, u oznaci $y \,\mathrm{dom}_S\, z$, ako vrijedi:*

$$y_i > z_i, \forall i \in S \tag{1.1.5}$$

$$y(S) \leq v(S). \tag{1.1.6}$$

Za $y, z \in I(v)$, kažemo da y dominira z, u oznaci $y \,\mathrm{dom}\, z$, ako postoji skup $S \in 2^n \setminus \{\emptyset\}$ takav da $y \,\mathrm{dom}_s\, z$.

Dakle, imputacija y dominira z preko koalicije S ako je y bolja nego z za svaki član i koalicije S te je isplatu $y(S)$ moguće ostvariti od strane članova iz S koaliranjem. To nas vodi do iduće definicije:

$$D(S) := \{z \in I(v) \,|\, \text{postoji}\, y \in I(v) \text{ t.d. } y \,\mathrm{dom}_S\, z\} \tag{1.1.7}$$

Vidimo da se skup $D(S)$ sastoji od svih skupova koji su dominirani preko S.

Propozicija 1.7. *Za svaku igru (N, v) vrijedi:*

$$a)\, D(N) = \emptyset \tag{1.1.8}$$

$$b)\, D(S) = \emptyset, \text{ ako je } |S| = 1 \tag{1.1.9}$$

Dokaz. *a)* Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $z \in D(N)$. Tada postoji $y \in I(v)$ t.d. vrijedi (1.1.5). Iz toga slijedi $y(N) > z(N)$. No, budući da je $z \in D(N)$, po definiciji imputacije vrijedi da je z efikasan, tj. $z(N) = v(N)$. Slijedi $y(N) > z(N) = v(N)$, što je kontradikcija sa (1.1.2), y je efikasan.

b) Pretpostavimo suprotno, kao u *a)*. Neka je $S = \{i\}$. Vrijedi $y(S) = y_i$. Po (1.1.5) i (1.1.1) slijedi $y_i > z_i \geq v(i)$. Zbog (1.1.6) vrijedi $y(S) = y_i \leq v(S) = v(i)$. Kontradikcija. □

Definicija 1.8. *Za* $x \in I(v)$ *kažemo da je nedominiran ako* $x \in I(v) \backslash \bigcup_{S \in 2^N \backslash \{\emptyset\}} D(S)$.

Dakle, x je nedominiran ako je imputacija te nije dominiran ni za koju koaliciju S.

Primjer 1.9

Neka je (N, v) igra sa tri igrača sa vrijednostima koalicija $v(1,2) = 2, v(N) = 1, v(S) = 0$ ako $S \neq \{1,2\}$. Vidimo da će $D(S)$ biti prazan skup ako je $S \neq \{1,2\}$ jer je tada $y(S) \leq v(S) = 0$. U slučaju da je $S = \{1,2\}$, pokazat ćemo da vrijedi:

$$D(\{1,2\}) = \{x \in I(v) \,|\, x_3 > 0\}.$$

Neka je $z \in I(v)$ za koji vrijedi $z_3 > 0$. Definiramo vektor $y = (z_1 + \frac{z_3}{2}, z_2 + \frac{z_3}{2}, 0)$. Tada vrijedi $y_i > z_i$, $\forall i \in \{1,2\}$ te $y(\{1,2\}) = \sum_i z_i = v(N) = 1 < 2 = v(1,2)$. Ako za neki $z \in I(v)$ vrijedi $z_3 = 0$, tada za neki y t.d. $y \operatorname{dom}_{\{1,2\}} z$ mora vrijediti $y_1 > z_1$ i $y_2 > z_2$, a to znači da je $y(N) = y_1 + y_2 + y_3 > z_1 + z_2 + 0 = v(N)$, tj. y nije imputacija. Iz toga vidimo da je $x \in I(v)$ nedominiran ako zadovoljava $x_3 = 0$.

1.2 Jezgra i dominacijska jezgra

Kroz prošlo poglavlje smo uveli osnovnu notaciju te se upoznali sa pojmom dominacije. Sa ciljem pronalaska *pravedne* distribucije isplate, ili barem one za koju se niti jedan igrač (ili dio koalicije) ne može buniti, u ovom poglavlju ćemo definirati *dominacijsku jezgru* i *jezgru* te pokazati u kojim su odnosima.

Definicija 1.10. *Dominacijska jezgra ili D-jezgra igre* (N, v) *je skup*

$$DC(v) := I(v) \setminus \bigcup_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} D(S). \tag{1.2.1}$$

Vidimo da dominacijska jezgra nije ništa drugo nego skup svih imputacija koje su nedominirane.

Propozicija 1.11. *D-jezgra je konveksan skup.*

Dokaz. Uzmimo $x, y \in DC(v)$ te $\lambda \in (0, 1)$. Definiramo $z := \lambda x + (1 - \lambda)y$. Slijedi:

$$z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)y_i \geq \lambda v(i) + (1 - \lambda)v(i) \geq v(i) \tag{1.2.2}$$

$$\begin{aligned} z(N) &= \sum_{i \in N} z_i \\ &= \sum_{i \in N} [\lambda x_i + (1 - \lambda)y_i] \\ &= \lambda \sum_{i \in N} x_i + (1 - \lambda) \sum_{i \in N} y_i \\ &= \lambda v(N) + (1 - \lambda)v(N) = v(N), \end{aligned} \tag{1.2.3}$$

čime smo dokazali da je $z \in I(v)$. Preostalo je pokazati da z nije dominiran ni za koju koaliciju S. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $y^d \in I(v)$, $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ takvi da vrijedi $y^d \operatorname{dom}_S z$. To znači da vrijedi:

$$y_i^d > z_i = \lambda x_i + (1 - \lambda)y_i, \ \forall i \in S \tag{1.2.4}$$

$$y^d(S) \leq v(S) \tag{1.2.5}$$

Zapišimo na drugi način: $y_i^d = \lambda y_i^d + (1 - \lambda)y_i^d$, uvrstimo u (1.2.4) te sumirajmo po $i \in S$. Dobivamo:

$$\lambda \sum_i y_i^d + (1 - \lambda) \sum_i y_i^d > \lambda \sum_i x_i + (1 - \lambda) \sum_i y_i$$

Zaključujemo da je $\sum_i y_i^d$ veće od $\sum_i x_i$ ili od $\sum_i y_i$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $\sum_i y_i^d > \sum_i x_i$. Slijedi $x(S) < y^d(S) \leq v(S)$. Definirajmo $\delta = \frac{\sum_i y_i^d - \sum_i x_i}{|S|}$. Sad možemo konstruirati vektor $t_i = x_i + \delta$, $\forall i \in S$, $t_i = y_i^d$, $\forall i \notin S$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} t_i &= \sum_{i \in N} y_i = v(N) \\ t_i &= y_i^d \geq v(i), \ \forall i \notin S \\ t_i &= x_i + \delta > x_i \geq v(i), \ \forall i \in S \\ t(S) &= y^d(S) \leq v(S) \end{aligned}$$

Vidimo da je t imputacija te da vrijedi $t \operatorname{dom}_S x$, što je kontradikcija sa $x \in DC(v)$. Dakle, vrijedi $z \notin \bigcup_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} D(S)$, tj. $z \in DC(v)$. □

Definicija 1.12. *Jezgra igre (N, v) je skup*

$$C(v) := \{x \in I(v) \,|\, x(S) \geq v(S) \text{ za sve } S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\,\}. \tag{1.2.6}$$

Definicija jezgre je poprilično intuitivna. To je skup svih vektora isplate kod kojih je količina isplate za dio koalicije S veća nego količina koju bi bilo koja zasebna koalicija S mogla postići. Igrači nemaju razloga izaći iz velike koalicije te formirati zasebne koalicije S.

Teorem 1.13. *Za svaku TU-igru, jezgra je podskup D-jezgre.*

Dokaz. Neka je (N, v) TU-igra i $x \in I(v)$, $x \notin DC(v)$. Tada postoji $y \in I(v)$ i koalicija $S \neq \{\emptyset\}$ t.d. $y \,\mathrm{dom}_S\, x$. Slijedi $v(S) \geq y(S) > x(S)$. Dakle, $x \notin C(v)$. □

Budući da je jezgra $C(v)$ definirana pomoću linearnih nejednakosti, možemo ju *lako* izračunati. Ostaje odgovoriti na pitanje u kojim je slučajevima jezgra jednaka dominacijskoj jezgri? Pokazat ćemo da je dovoljan uvjet da igra zadovoljava nejednakost:

$$v(N) \geq v(S) + \sum_{i \in N \setminus S} v(i),\ \forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}. \tag{1.2.7}$$

Na prvi pogled, nejednakost (1.2.7) se ne čini toliko intuitivna. Ali, poprilično je logična. Ako nejednakost ne vrijedi, to znači da, za neku koaliciju S, *budžet* $v(N)$ nije dovoljan da se i koaliciji S i igračima koji nisu u S isplati onoliko koliko mogu ostvariti sami. To znači da će jedan od njih dobiti manje, a u tom slučaju im se više isplati formirati neku drugu koaliciju, umjesto da formiraju veliku koaliciju. Dakle, jezgre će biti jednake ako je velika koalicija najisplativija za svaku koaliciju, a elementi jezgre će biti distribucije te isplate za koje se niti jedan igrač nema motivacije buniti.

Lema 1.14. *Neka je $x \in I(v)$ te neka vrijedi $x(S) < v(S)$, za neki $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$. Ako je nejednakost (1.2.7) zadovoljena, tada postoji $y \in I(v)$ takav da $y \,\mathrm{dom}_S\, x$.*

Dokaz. Definiramo y:

$$y := \begin{cases} x_i + \frac{1}{|S|}(v(S) - x(S)), & i \in S \\ v(i) + \frac{1}{|S \setminus N|}(v(N) - v(S) - \sum_{i \in N \setminus S} v(i)), & i \notin S \end{cases} \tag{1.2.8}$$

Definicija je namještena tako da vrijedi $y \in I(v)$:

$y_i \geq v(i)$ za $i \in N \setminus S$ zbog jednakosti (1.2.7),
$y_i \geq v(i)$ za $i \in S$ zbog $x \in I(v)$,
a lako se pokaže da je $y(S) = v(N)$.

Također, zbog pretpostavke $x(S) < v(S)$, vrijedi $y \,\mathrm{dom}_S\, x$, što dokazuje tvrdnju. □

Prethodnu lemu možemo interpretirati kao: ako je velika koalicija najisplativija, tada svaki njezin podskup (kod nedominiranih distribucija) dobiva barem onoliko koliko je u mogućnosti sam ostvariti.

Teorem 1.15. *Neka je (N, v) igra za koju vrijedi nejednakost (1.2.7). Tada je $DC(v) = C(v)$.*

Dokaz. Zbog teorema (1.13), dovoljno je pokazati $DC(v) \subseteq C(v)$. Pretpostavimo da je $x \in DC(v)$. Tada, po definiciji od $DC(v)$, ne postoji $y \in I(v)$ takav da $y \operatorname{dom} x$. Iz leme slijedi da vrijedi $x(S) \geq v(S)$, za svaki $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$, a to po definiciji jezgre znači da je $x \in C(v)$ □

Iako se nejednakost (1.2.7) čini poprilično specifična, pokazat ćemo da ona vrijedi čim jezgra nije prazna.

Propozicija 1.16. *Neka je $C(v) \neq \emptyset$. Tada vrijedi nejednakosti (1.2.7).*

Dokaz. Uzmimo neki $x \in C(v)$. Slijedi:

$$\begin{aligned} v(N) &= x(N) \\ &= x(S) + x(N \setminus S) \\ &\geq v(S) + x(N \setminus S) \\ &\geq v(S) + \sum_{i \in N \setminus S} v(i),\ \forall S \in 2^n \setminus \{\emptyset\}, \end{aligned} \tag{1.2.9}$$

gdje predzadnja nejednakost slijedi iz definicije jezgre, a zadnja iz efikasnosti vektora x. □

Definicija 1.17. *Kažemo da je TU-igra (N, v) super-aditivna ako vrijedi:*

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T),\ \forall S, T \subseteq N,\ S \cap T = \emptyset \tag{1.2.10}$$

Super-aditivne igre su igre u kojima formiranje sve većih koalicija donosi sve veću vrijednost, a to je čest slučaj u stvarnosti. Iz definicije se lako vidi da za njih uvijek vrijedi nejednakost (1.2.7), što nam donosi sljedeći korolar:

Korolar 1.18. *Za super-aditivnu igru uvijek vrijedi $DC(v) = C(v)$.*

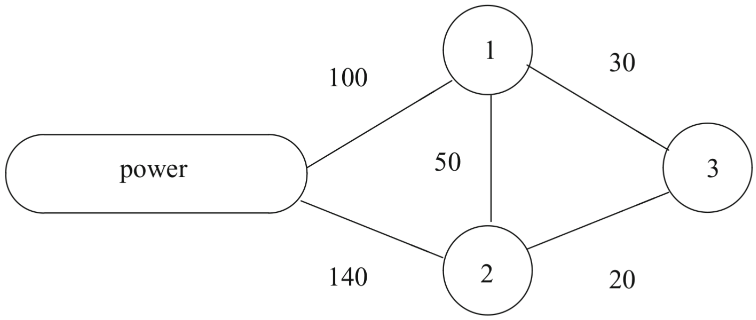
Da ne ostane sve na teoriji, izračunat ćemo jezgru za nekoliko primjera iz uvoda.

Primjer 1.19

Gradovi 1, 2 i 3 se žele priključiti na obližnji izvor električne energije preko električnih vodova. Troškovi spajanja su prikazani na slici (1.2).
Svaki grad može samostalno iznajmiti bilo koji električni vod. Naš skup igrača se sastoji od tri grada, označimo ga sa $N = \{1, 2, 3\}$. Troškove spajanja ovisno o koaliciji S možemo prikazati tablicom:

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$c(S)$	100	140	130	150	130	150	50
$v(S)$	0	0	0	90	100	120	220

Za troškove $c(S)$ smo uzeli najjeftinije moguće spajanje svih gradova u koaliciji S sa izvorom. Ušteda za koaliciju S je jednaka razlici ukupnih troškova da se svi



Slika 1.2: Troškovi spajanja

članovi koalicije pripoje sami i troškova pripajanja cijele koalicije. Računamo ju preko formule:

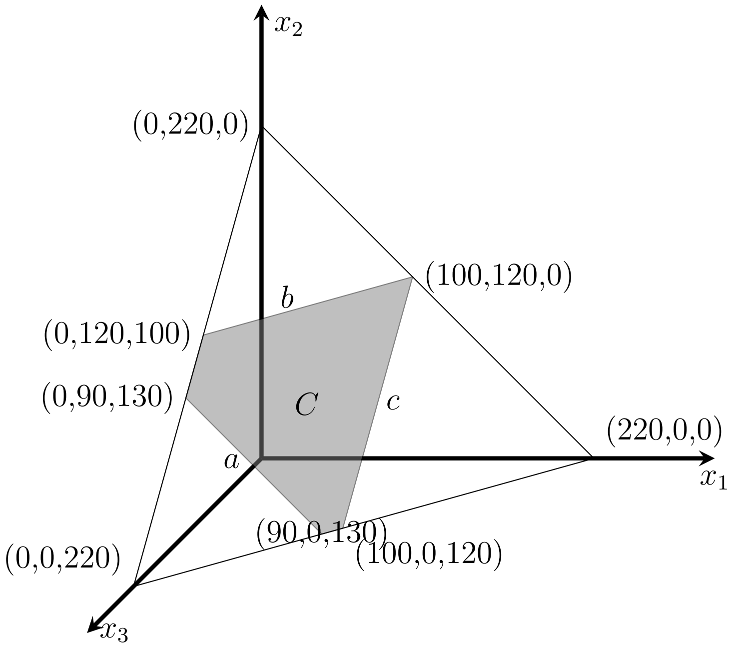
$$v(S) := \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$$

Ponovimo: da bi vektor x bio u jezgri, x mora biti imputacija te mora vrijediti $x(S) \geq v(S)$, $\forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$.
Zapišimo te uvjete:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 = v(S) &= 220 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\ x_1 + x_2 &\geq 90 \\ x_1 + x_3 &\geq 100 \\ x_2 + x_3 &\geq 120 \end{aligned}$$

Dobili smo zadaću koja je koja se može riješiti metodama linearnog programiranja.

Promotrimo rješenje prikazano na slici (1.3). Budući da imamo $x_1+x_2+x_3 = 220$, jezgra je dvodimenzionalan skup i, budući da je $x_i \geq 0$, nalazi se unutar trokuta sa vrhovima $(220, 0, 0)$, $(0, 220, 0)$, $(0, 0, 220)$. Nadalje, jezgra je ograničena vrijednostima dvočlanih koalicija. To smo prikazali stranicama a, b i c. Stranica a predstavlja uvjet $x_1+x_2 \geq 90$, tj. ona se sastoji od distribucija isplate unutar trokutu takvih da je $x_1 + x_2 = 90$ (ili $x_3 = 130$). Stranica b odgovara uvjetu $x_1 + x_3 \geq 100$, a c uvjetu $x_2 + x_3 \geq 120$. Slijedi da je skup obojan u sivo, C, jezgra te rješenje problema.



Slika 1.3: Rješenje problema gradova

Primjer 1.20

Pretpostavimo da postoje tri igrača: 1, 2 i 3. Igrači 1 i 2 posjeduju po jednu desnu rukavicu, a igrač 3 posjeduje samo jednu lijevu. Pretpostavimo da jedan par rukavica (jedna lijeva i jedna desna) donosi vrijednost 1, dok sve ostalo 0. Igra je opisana idućom tablicom:

S	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$	0	0	0	0	1	1	1

Nakon što postavimo nejednadžbe iz definicije $C(v)$, vidimo da je jedino rješenje $x = (0, 0, 1)$, tj. da igrač 3 dobiva cjelokupnu isplatu.

1.3 Jednostavne igre

Sam naziv *koalicijske igre* nas asocira na političke koalicije. Jednostavne igre modeliraju upravo takve situacije, npr. glasovanje u Vijeću UN-a, gdje nije svaki glas jednako vrijedan i postoje uvjeti da bi nešto bilo izglasano; ili izglasavanje zakona u SAD-u, gdje Senat, Dom predstavnika i predsjednik SAD-a moraju dati odobrenje da bi zakon stupio na snagu.

U ovom poglavlju ćemo definirati osnovne pojmove za jednostavne igre te navesti nekoliko primjera istih.

Definicija 1.21. *Jednostavna igra* (N, v) *je igra u kojoj svaka koalicija ima vrijednost 1 ili 0, a velika koalicija ima vrijednost 1. Koalicije koje imaju vrijednost 1 nazivamo dobitne, a koje imaju vrijednost 0 gubitne. Minimalna dobitna koalicija je ona za koju je svaki pravi podskup gubitan.*
Igrač i *se naziva diktator ako vrijedi:* $v(S) = 1$ *ako i samo ako* $i \in S$*. Igrač* i *se naziva veto igrač ako se nalazi u svakoj dobitnoj koaliciji. Skup svih veto igrača igre* v *označavamo sa* $\text{veto}(v)$*.*

Skup svih veto igrača, $\text{veto}(v)$, možemo zapisati kao:

$$\text{veto}(v) = \bigcap \{S \in 2^N \mid v(S) = 1\}. \tag{1.3.1}$$

Oznakom $e^i \in \mathbb{R}^N$ ćemo označavati kanonski vektor, tj.

$$e^i_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \tag{1.3.2}$$

Primjer 1.22

Neka je (N, v) TU-igra. Neka je $i \in N$ diktator, tj. neka vrijedi:

$$v(S) = 1 \text{ ako i samo ako } i \in S, \text{ a } 0 \text{ inače.}$$

Tu igru često označavamo sa δ_i. Možemo vidjeti da vrijedi:

$$\begin{aligned} &v(N) = 1,\, v(\{i\}) = 1 \implies I(v) = \{e^i\}, \\ &v(S \setminus \{i\}) = 0 \implies \text{veto}(v) = \{i\}, \\ &C(v) = DC(v) = \{e^i\}. \end{aligned}$$

Primjer 1.23

Zamislimo igru sa tri igrača u kojoj pobijedi ona koalicija koja uspije skupiti većinu. To zapravo znači da vrijedi $v(S) = 1$ za $|S| \in \{2, 3\}$ i $v(S) = 0$ za $|S| \in \{0, 1\}$. Tada za skup svih veto igrača vrijedi:

$$\{1, 2\} \cap \{1, 3\} \cap \{2, 3\} \cap \{1, 2, 3\} = \emptyset = \text{veto}(v),$$

a za jezgu i dominacijsku jezgru vrijedi:

$$C(v) = DC(v) = \emptyset$$

zato što je igra super-aditivna i zato što za svaku distribuciju $x \in I(v)$ postoji $x_i > 0$, a tada možemo definirati distribuciju y t.d. $y(N \setminus \{i\}) > x(N \setminus \{i\})$ (dajemo preostalim igračima vrijednost x_i).

Primjer 1.24

Neka je $N = \{1, \ldots, n\}$ skup igrača, a $T \subseteq N$ neprazna koalicija. Tada igru (N, u_T) nazivamo igra T-sporazuma ako vrijedi: $u_T(S) = 1$ ako i samo ako je $T \subseteq S$. Za takvu igru je očito $\text{veto}(u_T) = T$ te vrijedi:

$$C(u_T) = DC(u_T) = \text{conv}\{e^i \,|\, i \in T\}.$$

To se vidi zato što se $u_T(S)$ ne mijenja ako u koaliciju T dodajemo igrače iz $N \setminus T$, a ako smanjujemo koaliciju T, onda je vrijednost koalicije jednaka 0. Dakle, dovoljno je gledati koaliciju T.

Zadnji primjer daje indicije o postojanju povezanosti između jezgre i veto igrača. Primjetimo da jednostavne igre nisu super-aditivne, tako da ne zadovoljavaju nužno nejednakost (1.2.7), ali vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1.25. *Neka je (N, v) jednostavna igra. Tada vrijedi:*

i) $C(v) = \text{conv}\{e^i \in \mathbb{R}^n \,|\, i \in \text{veto}(v)\}$

ii) $\text{veto}(v) = \emptyset$ i $\{i \in N \,|\, v(i) = 1\} = \{k\} \implies C(v) = \emptyset, DC(v) = \{e^k\}$.
Inače, $DC(v) = C(v)$

Riječima, jezgra jednostavne igre je neprazna ako i samo ako postoje veto igrači. Tada se isplata $v(N) = 1$ dijeli samo među njima. Nadalje, jezgra je jednaka dominacijskoj jezgi, osim ako ne postoji niti jedan veto igrač te točno jedan igrač dobiva cijelu isplatu, u kojem slučaju je jezgra prazna, a dominacijska jezgra sadrži samo isplatu tom igraču.

Dokaz. *i)* Neka je $i \in \text{veto}(v)$. Neka je $S \in 2^N$ neprazna koalicija. Ako je $i \in S$, onda vrijedi $e^i(S) = 1 \geq v(S)$. Ako i nije iz S, onda vrijedi $e^i(S) = 0 = v(S)$ jer je i veto igrač. Budući da je $C(v)$ konveksan skup, pokazali smo $\supseteq$.

Uzmimo sada $x \in C(v)$. Dovoljno je dokazati $i \notin \text{veto}(v) \implies x_i = 0$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji igrač $i \notin \text{veto}(v)$ i da vrijedi $x_i > 0$. Budući da i nije veto igrač, postoji S takav da je $v(S) = 1$ i da $x \notin S$. Slijedi:

$$x(S) = x(N) - x(N \setminus S) \leq 1 - x_i < 1 = v(S), \tag{1.3.3}$$

što je kontradikcija sa pretpostavkom $x \in C(v)$.

ii) Pretpostavimo da je $\text{veto}(v) = \emptyset$ i da igrač k dobiva cijelu isplatu. Zbog *i)*, $C(v) = \emptyset$. Po definiciji od $I(v)$, vrijedi $I(v) = \{e^k\}$, pa slijedi $DC = \{e^k\}$.
Tvrdnju $DC(v) = C(v)$ dokazujemo po slučajevima:

a) $\text{veto}(v) = \emptyset$ i $\{i \in N \,|\, v(i) = 1\} = \emptyset \implies$ sve jednočlane koalicije imaju vrijednost 0, pa vrijedi (1.2.7), Jednakost slijedi iz teorema (1.15)

b) veto$(v) = \emptyset$ i $|\{i \in N \,|\, v(i) = 1\}| \geq 2 \implies v(N) = 1$, a $\sum v(i) \geq 2$. Slijedi $I(v) = \emptyset$ po definiciji skupa imputacija, pa je $C(v) = DC(v) = \emptyset$

c) veto$(v) \neq \emptyset \implies C(v) \neq \emptyset$ zbog *i)*. Tvrdnja slijedi iz propozicije (1.16) i teorema (1.15). □

Primjer 1.26

Neka je $N = \{1, 2, 3\}$, $v(\{1\}) = v(\{2, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$ i $v(S) = 0$ za ostale koalicije. Vidimo da vrijedi *veto*$(v) = \emptyset$, $C(v) = \emptyset$ i $DC(v) = \{e^1\}$.

Primjer 1.27

Riješimo primjer iz uvoda:
Vijeće sigurnosti UN-a se sastoji od 5 stalnih članova (SAD, Rusija, Velika Britanija, Francuska i Kina) te 10 ostalih članova. Da bi Vijeće donijelo odluku, potrebna je suglasnost barem 9 članova, uključujući svih 5 stalnih. Sad znamo da su stalni članovi zapravo veto igrači. Po prethodnom teoremu vidimo da se jezgra i dominacijska jezgra sastoje od konveksnih kombinacija vektora e^i, gdje je i neka stalna članica.

1.4 Stabilni skupovi

Kao motivaciju i dobar uvod u stabilne skupove, razmotrimo idući primjer:

Primjer 1.28

Neka je $N = \{1, 2, 3\}$ i (N, v) TU-igra. Neka su vrijednosti svih koalicija jednake 1, osim za jednočlane, čije su jednake 0. Definirajmo skup:

$$A := \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0), (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}), (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\} \tag{1.4.1}$$

Budući da je $v(i) = 0, \forall i \in N$, vektori iz A su individualno racionalni, a vidimo da su i efikasni ($v(N) = 1$). Dakle, sva tri su imputacije. Lako vidimo i da jedan drugoga ne dominiraju. Promotrimo sad $x \in I(v) \setminus A$. Ako vrijedi $x_i \geq \frac{1}{2}$ za neki i, tada za $S = N \setminus \{i\}$ postoji vektor iz $y \in A$ koji dominira x preko S. Inače, vrijedi $x_i < \frac{1}{2}, \forall i$ pa bilo koji vektor iz A dominira x preko $S = \{i \in N \,|\, y_i \neq 0\}$. Vidimo da svaku imputaciju iz $x \in I(v) \setminus A$ dominira neki vektor iz A. Takve vektore su matematičari von Neumann i Morgenstern nazvali *rješenje* igre. Na kraju, primijetimo da je svaki vektor iz A također dominiran, npr. $(0.8, 0, 0.2)\, \mathrm{dom}_{N \setminus \{2\}} (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

Definicija 1.29. *Neka je (N, v) TU-igra te neka je $A \subseteq I(v)$. Podskup A nazivamo stabilnim ako vrijedi:*

$$\forall x, y \in A \implies x \text{ ne dominira } y \tag{1.4.2}$$

$$x \in I(v) \setminus A \implies (\exists y \in A)\, y \operatorname{dom} x \tag{1.4.3}$$

Prvo svojstvo u definiciji nazivamo *unutrašnja stabilnost*, a drugo *vanjska stabilnost*.

Stabilan skup u igri nije nužno jedinstven. U prošlom primjeru je skup $B_c := \{x \in I(v) \,|\, x_3 = c\}$ stabilan za svaki $c \in [0, \frac{1}{2})$ (dokaz je sličan kao za skup A iz primjera). Problem egzistencije stabilnih skupova još nije u potpunosti riješen, ali ipak možemo dokazati postojanje uz neke uvjete:

Teorem 1.30. *Neka je (N, v) jednostavna igra te neka je S minimalna dobitna koalicija. Neka je skup Δ^S definiran sa:*

$$\Delta^S := \{x \in I(v) \,|\, x_i = 0, \, \forall i \notin S\} \tag{1.4.4}$$

Tada je, uz uvjet da je neprazan, Δ^S stabilan skup.

Dokaz. Uzmimo $x, y \in \Delta^S$. U slučaju da su jednaki, očito vrijedi unutrašnja stabilnost. Ako je $x \neq y$, tada postoji $j \in S$ takav da je $x_j \neq y_j$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavljamo $y_j > x_j$. Slijedi da x ne dominira y preko S, a budući da je S minimalna dobitna koalicija vrijedi $v(S') = 0, \forall S' \subset S$ te $x_i = 0, \forall i \notin S$. Slijedi da x ne dominira y ni za koji podskup $S' \subseteq N$.
x i y su imputacije pa vrijedi $\sum_{i \in S} x_i = \sum_{i \in S}$. Sad imamo:

$$\sum_{i \in S} x_i - \sum_{i \in S} y_i = 0$$

$$\sum_{i \in S \setminus \{j\}} x_i - \sum_{i \in S \setminus \{j\}} y_i = y_j - x_j$$

Budući da je $y_j - x_j > 0$, tada je i lijeva strana pozitivna, a to znači da postoji neki $i \in S \setminus \{j\}$ takav da $x_i > y_j$. Analognim zaključivanjem, vrijedi da y ne dominira x.

Uzmimo sad $x \in I(v) \setminus \Delta^S$. Primijetimo da, ukoliko je skup prazan, vrijedi (1.4.3), pa je Δ^S stabilan. Budući da x nije u Δ^S, postoji $i \notin S$ takav da $x_i \neq 0$. Definiramo vektor y tako da vrijedi $y_i = 0, \, \forall i \notin S$ te $y_i = x_i + \sum_{j \notin S} \frac{x_j}{|S|}, \, \forall i \in S$.
y je očito imputacija te vrijedi $y \operatorname{dom}_S x$. S time smo dokazali vanjsku stabilnost. Dakle, Δ^S je stabilan skup.

□

Idući teorem govori o odnosu stabilnih skupova i dominacijske jezgre:

Teorem 1.31. *Neka je (N, v) igra. Tada vrijedi:*

$$i)\, DC(v) \subseteq A, \text{ za svaki stabilni skup A}$$
$$ii)\, A \text{ i } B \text{ stabilni}, \; A \neq B \implies A \nsubseteq B$$

Dokaz. Neka je $x \in DC(v)$ te neka je A neki stabilan skup. Vrijedi $x \in I(v)$. Pretpostavimo da je $x \in I(v) \setminus A$. Po definiciji stabilnog skupa, postoji $y \in A$ takav da $y \operatorname{dom} x$. Budući da je x iz dominacijske jezgre, x je nedominiran. Kontradikcija. Slijedi $x \in A$, čime smo dokazali prvu tvrdnju.

Pretpostavimo da su A i B stabilni, $A \neq B$ te da je $A \subseteq B$. Tada postoji $x \in B$ takav da $x \notin A$. Budući da je A stabilan, po (1.4.3) postoji neki $y \in A$ takav da $y \operatorname{dom} x$. Vektor y nije iz B jer bi onda vrijedilo $x, y \in B$, $y \operatorname{dom} x$, što je kontradikcija sa (1.4.2). Dakle, $A \nsubseteq B$. □

Korolar 1.32. *Neka (N, v) igra te neka joj je dominacijska jezgra stabilan skup. Tada je to i jedinstven stabilan skup.*

Dokaz. Slijedi iz prve i druge tvrdnje prošlog teorema. □

Napomena: Već smo dokazali da je jezgra podskup D-jezgre. Iz prethodnog teorema možemo zaključiti da, ako je jezgra stabilan skup, onda je to jedistven stabilan skup.

Stabilnih skupovi nude alternativno rješenje za koalicijsku igru. No, susrećemo se sa nekoliko problema. Prvi je činjenica da je stabilnost svojstvo skupa, a ne pojedinačnih vektora. Jezgra, na primjer, nema taj problem. Drugi problem je to što ih nije lako pronaći, a treći je to što problem egzistencije nije u potpunosti riješen. Zbog tih problema, često se priklanjamo nekim drugim rješenjima igre.

1.5 Uravnotežene igre i jezgra

U ovom poglavlju ćemo okarakterizirati igre u smislu *ravnoteže*, a na kraju iskazati i dokazati Bondareva-Sharpleyjev teorem.

Definicija 1.33. *Neka je $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Preslikavanje $\lambda : 2^N \setminus \{\emptyset\} \mapsto \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ nazivamo uravnoteženim (balansiranim) ako vrijedi:*

$$\sum_{S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}} \lambda(S) e^S = e^N, \tag{1.5.1}$$

gdje sa $e^S \in \mathbb{R}^N$ označavamo karakteristični vektor za koaliciju S:

$$e_i^S := \begin{cases} 1, & i \in S \\ 0, & i \in N \setminus S. \end{cases} \tag{1.5.2}$$

Za uravnoteženo preslikavanje sa kodomenom $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ kažemo da je strogo uravnoteženo.

Riječima, uravnoteženo preslikavanje je ono koje pridružuje jednom igraču sumiranu vrijednost kroz sve koalicije od točno 1.

Definicija 1.34. *Skup B nepraznih koalicija nazivamo (strogo) uravnoteženim ili balansiranim ako postoji (strogo) uravnoteženo preslikavanje takvo da vrijedi:*

$$B = \{S \in 2^N \mid \lambda(S) > 0\}. \tag{1.5.3}$$

Primjer 1.35

Neka je $N_1, N_2, \ldots, N_k$ particija skupa N, tj. neka vrijedi $N = \bigcup_{r=1}^{k} N_r$ i $N_s \cap N_t = \emptyset$ za $s \neq t$. Tada je $\{N_1, N_2, \ldots, N_k\}$, uz uravnoteženo preslikavanje

$$\lambda(S) := \begin{cases} 1, & S \in \{N_1, N_2, \ldots, N_k\} \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

uravnotežen skup.

Primjer 1.36

Neka je $N = \{1, 2, 3\}$. Skup $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$ je uravnotežen uz uravnoteženo preslikavanje

$$\lambda(S) := \begin{cases} 0, & |S| \in \{1, 3\} \\ \frac{1}{2}, & |S| = 2. \end{cases}$$

Koncept uravnoteženog skupa možemo shvatiti kao generalizaciju particija. Pretpostavimo da svaki igrač može potrošiti jednu jedinicu vremena (energije, rada..). Svaki igrač može svoju jedinicu raspodijeliti između raznih koalicija kojima pripada. Na primjer, ako gledamo particije skupa N, tada će svaki igrač potrošiti svo svoje vrijeme na particiju kojoj pripada. U definiciji uravnoteženog preslikavanja je osigurano da će svaki igrač koji je član koalicije S posvetiti točno $\lambda(S)$ vremena koaliciji S, i tako za svaku koaliciju kojoj pripada. To možemo interpretirati kao *vijek postojanja* koalicije S. Također je osigurano da ukupno vrijeme potrošeno za svakog igrača iznosi točno 1.

Definicija 1.37. *Igru (N, v) nazivamo uravnoteženom ako za svako uravnoteženo preslikavanje $\lambda : 2^N \setminus \{\emptyset\} \mapsto \mathbb{R}_+$ vrijedi:*

$$\sum_{S} \lambda(S) v(S) \leq v(N) \tag{1.5.4}$$

Uvjet (1.5.4) se često naziva Bondareva-Sharpleyjev uvjet ili uvjet ravnoteže. Ako nastavimo usporedbu sa vremenom, uravnoteženost igre možemo shvatiti kao igru u kojoj je barem jednako isplativo koalirati u velikoj koaliciji tijekom jedne jedinice vremena umjesto formirati manje koalicije sa nekom uravnoteženom distribucijom vremena. Motivacija ove definicije leži u činjenici da je jezgra takvih igara neprazna, što ćemo uskoro dokazati. Za dokaz će nam trebati teorem o dualnosti iz linearnog programiranja.

Za vektore $x, y \in \mathbb{R}^n$, sa $x \cdot y$ označavamo skalarni produkt, tj. vrijedi:

$$x \cdot y = \sum_{i}^{n} x_i y_i. \tag{1.5.5}$$

Teorem 1.38 (O dualnosti)**.** *Neka je A $n \times p$ matrica, $b \in R^p$ te $c \in R^n$. Neka je $\{x \in \mathbb{R}^n \,|\, xA \geq b\} \neq \emptyset$ i $\{y \in \mathbb{R}^p \,|\, Ay = c, y \geq 0\} \neq \emptyset$. Tada vrijedi:*

$$min\{x \cdot c \,|\, xA \geq b\} = max\{b \cdot y \,|\, Ay = c, y \geq 0\} \tag{1.5.6}$$

Dokaz. Dokaz teorema se nalazi u [4]. □

Korolar 1.39. *Ako je jedan od dva skupa definirana sa (1.5.6) prazan, tada je i drugi, tj. rješenje oba programa se ne postiže.*

Napokon možemo dokazati dugo najavljivani teorem:

Teorem 1.40 (Bondareva-Sharpley)**.** *Neka je (N, v) TU-igra. Tada vrijedi iduća ekvivalencija:*

$$C(v) \neq \emptyset \iff (N, v) \text{ je uravnotežena igra}$$

Dokaz. Budući da je jezgra podskup skupa imputacija, a za svaku imputaciju x vrijedi $\sum x_i = v(N)$, slijedi:

$$C(v) \neq \emptyset \iff v(N) = min\{\sum_{i=1}^{n} x_i \,|\, x \in \mathbb{R}^N, x(S) \geq v(S), \forall S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\}. \tag{1.5.7}$$

Neka je A matrica sa karakterističnim vektorima e^S kao stupcima, neka je $c := e^N$ i neka je b vektor vrijednosti koalicije. Iz teorema (1.38) slijedi:

$$C(v) \neq \emptyset \iff v(N) = max\{\sum_{S} \lambda(S)v(S) \,|\, \sum_{S} \lambda(S)e^S,\ \lambda \geq 0\}. \tag{1.5.8}$$

Desna strana nam govori da je igra uravnotežena. Lako se vidi da su uvjeti nepraznosti u teoremu (1.38) zadovoljeni. □

2 Nukleolus

U prvom odjeljku smo definirali jezgru te neke njezine karakteristike. No, čak i kad postoji, jezgra može biti veliki skup brojeva, a mi bismo htjeli jedinstveno rješenje. *Nukleolus* ili *jezgrica* svakoj igri s nepraznim skupom imputacija pridružuje jedinstveni element tog skupa imputacija te, ako je jezgra neprazna, taj jedinstveni element se nalazi u jezgri. Nukleolus se zasniva na ideji viška, tj. razlike vrijednosti koalicije te količine koju članovi koalicije ostvaruju za neku distribuciju. Kad je višak pozitivan, članovi koalicije nisu zadovoljni sa količinom koju ostvare u koaliciji. nukleolus će se sastojati od vektora koji će minimizirati višak leksikografskim poretkom. *Pranukleolus* će biti element koji postoji za svaku igru, čak i kada je skup imputacija prazan, a za uravnotežene igre je on istovjetan nukleolusu.

U ovom odjeljku bavit ćemo se *nukleolusom* i *pranukleolusom*. Počet ćemo sa primjerom, pa ćemo se upoznati sa leksikografskim uređajem, na kojem se bazira definicija nukleolusa i pranukleolusa. Na kraju se bavimo karakterizacijama te načinom izračunavanja samih vrijednosti.

2.1 Primjer nukleolusa

Počinjemo sa primjerom na kojem ćemo pokazati osnovne ideje nukleolusa. Neka je (N, v) TU-igra zadana tablicom:

S	$\{\emptyset\}$	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
$v(S)$	0	4	4	4	8	12	16	24

Možemo vidjeti da je jezgra neprazna. Na primjer, vektor $x = (8, 8, 8)$. Vidimo da vrijedi $x_i = 8 > 4 = v(i), \forall i \in N$, te $\sum_{i \in S} x_i = 8 + 8 + 8 = 24 = v(N)$. Dakle, x je imputacija. Također, vrijedi $x(S) = 16 \geq v(S)$, $|S| = 2$, što znači da je $x \in C(v)$.

Neka je x neka efikasna distribucija. Za nepraznu koaliciju S, definiramo *višak* od S sa:

$$e(S, x) := v(S) - x(S). \tag{2.1.1}$$

Primjetimo da će višak od N biti jednak nula jer je $x(N) = v(N)$ (x je efikasan), zato $e(N, x)$ zanemarujemo.

Ideja računanja nukleolusa je da uzmemo neku imputaciju te izračunamo viškove. Od svih imputacija (ili efikasnih vektora ako računamo pranukleolus), uzmemo one gdje je maksimalan višak najmanji. Ako je taj skup jednočlan, to je naš (pra)nukleolus. Ako nije, gledamo koalicije za koje se maksimalan višak može smanjiti te ponovimo proceduru za njih, držeći višak ostalih koalicija fiksan. Na kraju, kao rezultat dobivamo (pra)nukleolus.

Primjetimo da će elementi jezgre po definiciji imati samo nepozitivne viškove, dok će elementi izvan jezgre imati barem jedan pozitivan. To nam govori da računanje nukleolusa možemo provoditi samo na elementima jezgre i da će pranukleolus biti jednak nukleolusu.

Izračunajmo sad viškove prezentirane igre za neke vektore jezgre:

S	$\emptyset$	{1}	{2}	{3}	{1,2}	{1,3}	{2,3}	{1,2,3}
$v(S)$	0	4	4	4	8	12	16	24
$e(S,(8,8,8))$		-4	-4	-4	-8	-4	0	
$e(S,(6,9,9))$		-2	-5	-5	-7	-3	-2	
$e(S,(6,8,10))$		-2	-4	-6	-6	-4	-2	

(2.1.2)

Pogledajmo vektor $(8,8,8)$. Najveći višak tog vektora je jednak 0, a ostvaren je za koaliciju $\{2,3\}$. Taj višak možemo smanjiti ako povećamo isplatu igračima 2 i 3, na trošak igrača 1. Isplate možemo povećati za maksimalno 1, što znači da će nam vektor biti $(6,9,9)$.

Vektor $(6,9,9)$ ima najveći višak jednak -2 i to za koalicije $\{2,3\}$ te $\{1\}$. Budući da su koalicije disjunktne, to doista i jest najmanji mogući višak za te koalicije. Čim bismo smanjili višak za jednu, povećao bi se višak druge. Primjetimo da su te koalicije uravnotežene, čak formiraju i particiju. Drugi najveći višak za vektor $(6,9,9)$ je jednak -3, a ostvaruje se za koaliciju $\{1,3\}$. Njega bismo mogli smanjiti ako povećamo isplatu igraču 1 ili 3, na trošak igrača 2. Zbog prošlih razmatranja, znamo da je isplata igraču 1 fiksirana, što znači da ćemo povećati isplatu igraču 3 na trošak igrača 2. To možemo napraviti za maksimalno 1, što nas vodi do vektora $(6,8,10)$.

Tu je maksimalni višak još uvijek -2, ali je drugi najveći -4, ostvaren za koalicije $\{2\}$ i $\{1,3\}$. Taj višak više ne možemo smanjiti. Preostaje nam pogledati treći maksimalni višak, -6, ostvaren za $\{3\}$ i $\{1,2\}$. Ako smanjimo jedan od ta dva viška, povećat će se drugi. Budući da su jednaki, to i jesu najmanji viškovi za te koalicije.

Slijedi da je $(6,8,10)$ nukleolus i pranukleolus zadane igre.

2.2 Leksikografski uređaj

Budući da ćemo u definiciji nukleolusa koristiti leksikografski uređaj, u ovom poglavlju ga definiramo.

Definicija 2.1. *Neka je $\mathbb{R}^k$ skup realnih vektora dimenzije k. Binarnu relaciju $\succeq$ na $\mathbb{R}^k$ koja zadovoljava:*

$$\begin{aligned}&\text{refleksivnost: } x \succeq x, \forall x \in \mathbb{R}^k\\ &\text{tranzitivnost: } x \succ y,\ y \succeq z \to x \succeq z, \forall x, y, z \in \mathbb{R}^k\\ &\text{antisimetričnost: } x \succeq y, y \succeq x \to x = y, \forall x, y, \in \mathbb{R}^k\end{aligned} \tag{2.2.1}$$

nazivamo parcijalni uređaj.

Za parcijalni uređaj $\succeq$, pišemo $x \succ y$ ako vrijedi $x \succeq y$ te $y \not\succeq x$.

Definicija 2.2. *Parcijalni uređaj koji zadovoljava:*

$$\text{potpunost: } (\forall x \in \mathbb{R}^k)(\forall y \in \mathbb{R}^k)\, x \succeq y \vee x \succeq y \tag{2.2.2}$$

nazivamo totalni uređaj.

Definicija 2.3. *Neka je $\mathbb{R}^k$ skup realnih vektora dimenzije k. Za vektore $x, y \in \mathbb{R}^k$ kažemo da je vektor x leksikografski veći ili jednak vektoru y, u oznaci $x \succeq_{\text{lex}} y$, ako je $x = y$, ili $x \neq y$ te za*

$$i = min\{j \in \{1, \dots, k\} \,|\, x_j \neq y_j\}$$

vrijedi $x_i > y_i$.

Vektor x je leksikografski veći od vektora y ako na prvoj koordinati za koju x i y nisu jednaki, x ima strogo veću vrijednost.

2.3 Pranukleolus i nukleolus

Već smo spomenuli da se nukleolus zasniva na ideji *viška*, pa definirajmo ga službeno:

Definicija 2.4. *Neka je (N, v) TU-igra te neka je $X \subseteq \mathbb{R}^N$ neki skup distribucija isplata. Za svaku nepraznu koaliciju $S \subseteq N$ i svaki $x \in X$, višak koalicije S za isplatu x je broj*

$$e(S, x, v) := v(S) - x(S). \tag{2.3.1}$$

Višak interpretiramo kao nezadovoljstvo koalicije S u slučaju da je x vektor isplate. Za svaki $x \in X$ sa $\theta(x)$ označavamo vektor svih viškova nepraznih koalicija, u nerastućem poretku.
Dakle,

$$\theta(x) = (e(S_1, x, v), \dots, e(S_{2^n-1}, x, v)), \tag{2.3.2}$$

gdje vrijedi $e(S_t, x, v) \geq e(S_p, x, v)$, za svake $1 \leq t \leq p \leq 2^n - 1$.

Definicija 2.5. *Neka je $\succeq_{\text{lex}}$ leksikografski uređaj na $\mathbb{R}^{2^n-1}$, kao što smo definirali u poglavlju (2.2). Generalizirani nukleolus (ili jezgrica) igre (N, v) u odnosu na skup distribucija isplate X je definran sa:*

$$\mathcal{N}(N, v, X) := \{x \in X \,|\, \theta(y) \succeq_{\text{lex}} \theta(x),\, \forall y \in X\} \tag{2.3.3}$$

Poanta generaliziranog nukleolusa je vrlo jasna, želimo leksikografski minimizirati viškove. Tražimo vektore x takve da je $\theta_1(x)$ minimalno. $\theta_1(x)$ predstavlja najveće nezadovoljstvo. Nakon toga, od vektora koji minimiziraju $\theta_1(x)$, tražimo one koji minimiziraju drugo najveće nezadovoljstvo, $\theta_2(x)$, i tako nastavljamo dalje.

Prvo pokazujemo za kakve sve skupove X je generalizirani nukleolus neprazan.

Teorem 2.6. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^N$ neprazan i kompaktan. Tada je, za svaku igru v, skup $\mathcal{N}(N, v, X)$ neprazan i kompaktan.*

Dokaz. Budući da su funkcije $e(S, \cdot, v)$ neprekidne za svaki S (zbroj neprekidnih), slijedi da je $\theta(\cdot)$ neprekidna. Rekurzivno definiramo:

$$\begin{aligned} &X_0 := X \\ &X_t := \{x \in X_{t-1} \,|\, \theta_t(y) \geq \theta_t(x),\ \forall y \in X_{t-1}\},\ t = 1, \ldots, 2^n - 1 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

Budući da je $\theta(\cdot)$ neprekidna, iz Weierstrassovog teorema slijedi da je X_t neprazan i kompaktan podskup od X_{t-1}. Posebno, to vrijedi za $t = 2^n - 1$. Iz definicije generaliziranog nukleolusa, vidimo da vrijedi $X_{2^n-1} = \mathcal{N}(N, v, X)$. $\square$

Pokazat ćemo da, ako dodamo i uvjet konveksnosti skupa X, generalizirani nukleolus u odnosu na skup X će se sastojati od jedne točke. Za dokaz će nam trebati sljedeća lema:

Lema 2.7. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^N$ konveksan, neka su $x, y, \in X$ te neka je $0 \leq \alpha \leq 1$. Tada vrijedi:*

$$\alpha\theta(x) + (1-\alpha)\theta(y) \succeq_{\text{lex}} \theta(\alpha x + (1-\alpha)y). \tag{2.3.5}$$

Dokaz. Neka su sve neprazne koalicije $S_1, \ldots, S_{2^n-1}$ poredane na način da vrijedi

$$\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) = (e(S_1, \alpha x + (1-\alpha)y, v), \ldots, e(S_{2^n-1}, \alpha x + (1-\alpha)y, v)). \tag{2.3.6}$$

Desna strana jednadzbe je jednaka $\alpha a + (1-\alpha)b$, gdje je $a = (e(S_1, x, v), \ldots, e(S_{2^n-1}, x, v))$, a $b = (e(S_1, y, v), \ldots, e(S_{2^n-1}, y, v))$. Budući da $\theta(x) \succeq_{\text{lex}} a$ i $\theta(y) \succeq_{\text{lex}} b$ (po definiciji od $\theta(\cdot)$), slijedi:

$$\alpha\theta(x) + (1-\alpha)\theta(y) \succeq_{\text{lex}} \alpha a + (1-\alpha)b = \theta(\alpha x + (1-\alpha)y), \tag{2.3.7}$$

što smo trebali i pokazati. $\square$

Teorem 2.8. *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}^N$ konveksan skup. Tada, za svaku igru (N, v), generalizirani nukleolus u odnosu na X sadrži najviše jedan vektor.*

Dokaz. Neka su $x, y \in \mathcal{N}(N, v, X)$ te neka je $0 < \alpha < 1$. Budući da su x i y oba iz generaliziranog nukleolusa, vrijedi $\theta(x) = \theta(y)$. To znači da su viškovi od x, y jednaki, ali ne nužno za iste koalicije. Budući da su x, y iz generaliziranog nukleolusa, slijedi:

$$\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) \succeq_{\text{lex}} \theta(x) = \theta(y) \tag{2.3.8}$$

a iz leme (2.7):

$$\theta(x) = \theta(y) = \alpha\theta(x) + (1-\alpha)\theta(y) \succeq_{\text{lex}} \theta(\alpha x + (1-\alpha)y). \tag{2.3.9}$$

Tada iz asimetričnosti leksikografskog uređaja, imamo:

$$\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) = \theta(x) = \theta(y) \tag{2.3.10}$$

Raspišimo po definiciji od θ:

$$\begin{aligned}\theta(\alpha x + (1-\alpha)y) &= (e(S_1, \alpha x + (1-\alpha)y, v), \ldots, e(S_{2^n-1}, \alpha x + (1-\alpha)y, v)) \\ &= \alpha(e(S_1, x, v), \ldots, e(S_{2^n-1}, x, v)) + (1-\alpha)(e(S_1, y, v), \ldots, e(S_{2^n-1}, y, v)) \\ &= \alpha a + (1-\alpha)b, \\ \theta(x) = \theta(y) &= \alpha\theta(x) + (1-\alpha)\theta(y)\end{aligned}$$

gdje su a, b definirani kao u lemi (2.7). Iz $\theta(x) \succeq_{\text{lex}} a$ i $\theta(y) \succeq_{\text{lex}} b$ slijedi da je $a = \theta(x)$ te $b = \theta(y)$. No, budući da je poredak koalicija iz a isti kao i iz b, slijedi da to vrijedi i za $\theta(x)$ i $\theta(y)$. Iz toga i činjenice da su svi viškovi za x i y jednaki, slijedi $x = y$. □

Korolar 2.9. *Generalizirani nukleolus igre (N, v) s obzirom na neprazan, kompaktan i konveksan skup sadrži točno jedan vektor.*

Za skup X često odabiremo skup imputacija $I(v)$ igre (N, v) ili skup svih efikasnih distribucija isplate, $I^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N)\}$.

Definicija 2.10. *Neka je (N, v) koalicijska igra. Generalizirani nukleolus igre (N, v) s obzirom na skup imputacija $I(v)$ nazivamo nukleolusom (ili jezgricom) igre (N, v). Označavamo ga sa $\nu(N, v)$.*

Korolar 2.11. *Nukleolus esencijalne igre (N, v) se sastoji od točno jedne točke.*

Dokaz. Dokazali smo da je skup imputacija neprazan, kompaktan i konveksan. Tvrdnja slijedi iz korolara (2.9). □

Definicija 2.12. *Generalizirani nukleolus neke igre (N, v) s obzirom na skup $I^*(N, v) = \{x \in \mathbb{R}^N \mid x(N) = v(N)\}$, nazivamo pranukleolusom (ili prajezgricom) igre (N, v). Označavamo ga sa $\nu^*(N, v)$.*

Propozicija 2.13. *Pranukleolus igre (N, v) je jednočlan skup.*

Dokaz. Neka su $x, y \in I^*(v)$ te neka je $\lambda \in (0, 1)$. Za $z := \lambda x + (1-\lambda)y$ vrijedi:

$$\begin{aligned} z(N) &= \sum_{i \in N} z_i \\ &= \sum_{i \in N} [\lambda x_i + (1-\lambda)y_i] \\ &= \lambda \sum_{i \in N} x_i + (1-\lambda) \sum_{i \in N} y_i \\ &= \lambda v(N) + (1-\lambda)v(N) \\ &= v(N). \end{aligned}$$

Dakle, $I^*(v)$ je konveksan. Primjetimo da je $I^*(v)$ sigurno neprazan jer je vektor $v_i = \frac{v(N)}{|N|}, i \in N$ sigurno iz $I^*(v)$. Iz teorema (2.8) slijedi tvrdnja. □

Propozicija 2.14. *Ako je skup imputacija neprazan, nukleolus igre (N, v) je jednočlan skup.*

Dokaz. Ako je $I(v)$ jednočlan, onda je konveksan, pa po teoremu (2.8) slijedi tvrdnja. Za $x, y \in I(v)$ definiramo z kao u prošloj propoziciji. Slijedi:

$$z_i = \lambda x_i + (1-\lambda)y_i \geq \lambda v(i) + (1-\lambda)v(i) = v(i), \forall i \in N$$

U prošloj propoziciji smo pokazali da je konveksna kombinacija efikasnih vektora i dalje efikasna, slijedi da je $I(v)$ konveksan. Također, skup imputacija je omeđen sa $v(i), i \in N$ odozdo i sa $v(N)$ odozgo te je neprekidan. Po korolaru (2.9) slijedi tvrdnja. □

Lema 2.15. *Ako je pranukleolus igre (N, v) individualno racionalan, tada je on i nukleolus igre (N, v).*

Dokaz. Neka je x^* pranukleolus igre (N, v). Iz definicije, pranukleolus je efikasan, a po pretpostavci individualno racionalan. Dakle, x^* je imputacija. Budući da je svaka imputacija posebno i efikasna, za neku imputaciju x vrijedi:

$$\theta(x) \succeq_{\text{lex}} \theta(x^*)$$

jer je x^* pranukleolus. Slijedi da je x^* nukleolus igre (N, v). □

Teorem 2.16. *Neka je (N, v) igra sa nepraznom jezgrom ($C(v) \neq \emptyset$). Tada vrijedi $\nu^*(N, v) = \nu(N, v) \in C(v)$.*

Dokaz. Neka je x imputacija u jezgri te neka je x^* pranukleolus igre. Budući da je x iz jezgre, vrijedi $x(S) \geq v(S)$, za svaku koaliciju S. Slijedi:

$$e(S, x) = v(S) - x(S) \leq 0,\ \forall S. \tag{2.3.11}$$

To implicira da je $\theta_1(x) \leq 0$. Jer je $\theta(x) \succeq_{\text{lex}} \theta(x^*)$, vrijedi $\theta_1(x^*) \leq \theta_1(x) \leq 0$. Po definiciji je $\theta_1(x^*) = \max_{S \in N \setminus \{\emptyset\}} e(S, x^*)$, iz čega slijedi da je za svaku koaliciju S $e(S, x^*) \leq 0$, tj. $x^*(S) \geq v(S)$. Zadnja nejednakost nam govori da je x^* u jezgri. Posebno, vrijedi $x_i^* \geq v(i)$, što znači da je x^* imputacija. Iz leme (2.15) slijedi da je x^* i nukleolus. □

2.4 Kohlbergov kriterij

U ovom poglavlju ćemo dokazati Kohlbergov kriterij za pranukleolus, koji karakterizira rješenje pomoću uravnoteženih skupova.

Definicija 2.17. *Neka je (N, v) TU-igra. Vektor $y \in \mathbb{R}^N$ za koji vrijedi $y(N) = 0$ nazivamo sporedna isplata.*

Definicija 2.18. *Neka je* (N, v) *TU-igra. Za svaki* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i* $x \in \mathbb{R}^N$ *označavamo:*

$$\mathcal{D}(\alpha, x, v) := \{S \subseteq N \setminus \{\emptyset\} \,|\, e(S, x, v) \geq \alpha\} \tag{2.4.1}$$

skup svih nepraznih koalicija sa viškom u x *od barem* α*.*

Teorem 2.19. *Neka je* (N, v) *igra te neka je* $x \in I^*(N, v)$*. Tada je ekvivalentno:*

i) $x = \nu^*(N, v)$

ii) Za svaki α *takav da vrijedi* $\mathcal{D}(\alpha, x, v) \neq \emptyset$ *i za svaku sporednu isplatu* y *takvu da* $y(S) \geq 0$ *na koalicijama iz* $S \in \mathcal{D}(\alpha, x, v)$*, vrijedi:*

$$y(S) = 0 \text{ za svaki } S \in \mathcal{D}(\alpha, x, v).$$

Dokaz. *i)* $\Rightarrow$ *ii)*
Pretpostavimo da je $x = \nu^*(N, v)$ te da vrijede uvjeti u *ii)* za x, α i y.
Definiramo:

$$z_\varepsilon := x + \varepsilon y, \; \forall \varepsilon > 0 \tag{2.4.2}$$

z_ε je efikasan:

$$z_\varepsilon(N) = x(N) + \varepsilon y(N) = v(N) + \varepsilon \cdot 0 = v(N) \tag{2.4.3}$$

Izabiremo dovoljno mali $\varepsilon^* > 0$ takav da za svaki neprazan skup $S \in \mathcal{D}(\alpha, x, v)$ i svaki neprazan skup $T \notin \mathcal{D}(\alpha, x, v)$ vrijedi:

$$\begin{aligned} e(S, z_{\varepsilon^*}, v) &= v(S) - (x(S) + \varepsilon^* y(S)) \\ &= e(S, x, v) - \varepsilon^* y(S) \\ &\geq \alpha - \varepsilon^* y(S) \\ &> e(T, x, v) - \varepsilon^* y(T) \\ &> e(T, z_{\varepsilon^*}, v). \end{aligned} \tag{2.4.4}$$

Takav ε^* sigurno postoji jer vrijedi $y(S) \geq 0, y(N) = 0 \Rightarrow y(N \setminus S) < 0$. Zapravo smo namjestili ε^* tako da će viškovi za koalicije iz $\mathcal{D}(\alpha, x, v)$ biti veći od viškova ostalih koalicija. Također, zbog $y(S) \geq 0$, vrijedi i:

$$\begin{aligned} e(S, z_{\varepsilon^*}, v) &= v(S) - (x(S) + \varepsilon^* y(S)) \\ &= e(S, x, v) - \varepsilon^* y(S) \\ &\leq e(S, x, v) \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo $y(S) > 0$ za neki $S \in \mathcal{D}(\alpha, x, v)$. Tada, zbog (2.4.4) i (2.4.5), vrijedi $\theta(x) \succeq_{\text{lex}} \theta(z_{\varepsilon^*})$. Po definiciji od z_{ε^*} je $z_{\varepsilon^*} \neq x$. Budući da je po *i)* x pranukleolus, dolazimo do kontradikcije.
ii) $\Rightarrow$ *i)*

Neka za $x \in I^*(N, v)$ vrijedi *ii)*. Neka je $z = \nu^*(N, v)$. Uvedimo oznaku:

$$\{e(S, x, v) \,|\, S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}\} = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_p\}.$$

uz $\alpha_1 > \cdots > \alpha_p$. Definiramo i $y := z - x$. Budući da su i x i z efikasni, y je sporedna isplata. Vrijedi $\theta(x) \succeq_{\text{lex}} \theta(z)$, pa imamo $e(S,x,v) = \alpha_1 \geq e(S,z,v)$, za svaki $S \in \mathcal{D}(\alpha_1, x, v)$. Slijedi:

$$e(S,x,v) - e(S,z,v) = (z-x)(S) = y(S) \geq 0. \tag{2.4.6}$$

Sada po pretpostavci $ii)$ slijedi da je $y(S) = 0, \forall S \in \mathcal{D}(\alpha_1, x, v)$.
Nadalje, pretpostavimo da je $y(S) = 0$, $\forall S \in \mathcal{D}(\alpha_t, x, v)$ za neki $1 \leq t \leq p$. Iz $\theta(x) \succeq_{\text{lex}} \theta(z)$, slijedi:

$$e(S,x,v) = \alpha_{t+1} \geq e(S,z,v),\ \forall S \in \mathcal{D}(\alpha_{t+1}, x, v) \setminus \mathcal{D}(\alpha_t, x, v). \tag{2.4.7}$$

Dakle, $y(S) \geq 0$ te, zbog $ii)$, $y(S) = 0$, $\forall S \in \mathcal{D}(\alpha_{t+1}, x, v)$. Budući da smo upravo dokazali bazu i korak indukcije, zaključujemo da vrijedi $y(S) = 0$, za svaki $S \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$. Iz definicije y slijedi $x = z$, tj. x je pranukleolus.

□

Napokon dokazujemo Kohlbergovu karakterizaciju pranukleolusa preko uravnoteženih skupova:

Teorem 2.20 (Kohlberg)**.** *Neka je (N,v) TU-igra te neka je $x \in I^*(N,v)$. Tada je ekvivalentno:*

i) $x = \nu^*(N,v)$

ii) Za svaki α, $\mathcal{D}(\alpha,x,v) \neq \emptyset \Longrightarrow \mathcal{D}(\alpha,x,v)$ je strogo uravnotežen skup.

Dokaz. $ii) \Rightarrow i)$
Neka je x takav da vrijedi $ii)$, neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $\mathcal{D}(\alpha,x,v) \neq \emptyset$. Uzmimo sporednu isplatu y takvu da vrijedi $y(S) \geq 0$, $\forall S \in \mathcal{D}(\alpha,x,v)$. Budući da je $\mathcal{D}(\alpha,x,v)$ strogo uravnotežen (po $ii)$), postoji $\lambda(S) > 0$, $\forall S \in \mathcal{D}(\alpha,x,v)$ takav da:

$$\sum_{S \in \mathcal{D}(\alpha,x,v)} \lambda(S) e^S = e^N \tag{2.4.8}$$

Pomnožimo skalarno sa y zdesna:

$$\sum_{S \in \mathcal{D}(\alpha,x,v)} \lambda(S) y(S) = y(N) = 0. \tag{2.4.9}$$

Dakle, $y(S) = 0$, $\forall S \in \mathcal{D}(\alpha,x,v)$. Iz teorema (2.19) slijedi da je x pranukleolus.

$i) \Rightarrow ii)$
Pretpostavimo da je $x = \nu^*(N,v)$. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ takva da je $\mathcal{D}(\alpha,x,v) \neq \emptyset$. Promotrimo linearan program:

$$\begin{aligned} max \sum_{S \in \mathcal{D}(\alpha,x,v)} & y(S), \\ -y(S) &\leq 0 \\ y(N) &= 0 \\ S &\in \mathcal{D}(\alpha,x,v) \end{aligned} \tag{2.4.10}$$

Rješenje je dostižno i, po teoremu (2.19), ono iznosi 0. Slijedi da je i dualan problem dostižan, tj. postoji takav $\lambda(S) \geq 0$, $\forall S \in \mathcal{D}(\alpha, x, v)$ i $\lambda(N) \in \mathbb{R}$ da vrijedi:

$$-\sum_{S \in \mathcal{D}(\alpha,x,v)} \lambda(S)e^S + \lambda(N)e^N = \sum_{S \in \mathcal{D}(\alpha,x,v)} e^S. \tag{2.4.11}$$

Slijedi:

$$\lambda(N)e^N = \sum_{S \in \mathcal{D}(\alpha,x,v)} (1 + \lambda(S))e^S. \tag{2.4.12}$$

Budući da je $1 + \lambda(S) > 0$, $\forall S \in \mathcal{D}(\alpha, x, v)$, imamo $\lambda(N) > 0$. Zaključujemo da je $\mathcal{D}(\alpha, x, v)$ strogo uravnotežen za

$$\lambda'(S) = \frac{1 + \lambda(S)}{\lambda(N)}, \forall S \in \mathcal{D}(\alpha, x, v). \tag{2.4.13}$$

□

2.5 Računanje nukleolusa

U ovom poglavlju ćemo pokazati metodu za računanje nukleolusa. Ta metoda će se sastojati od rješavanja niza linearnih programa. Složenost algoritma je eksponencijalna ovisno o broju igrača, što znači da će postupak biti koristan samo za relativno male igre.

Algoritam se oslanja na uvjete koje imputacija mora zadovoljavati da bi bila nukleolus. Naći ćemo imputaciju x čiji je vektor viškova $\theta(x)$ minimalan s obzirom na leksikografski poredak. U prvom koraku nalazimo sve vektore čiji je maksimalan višak θ_1 najmanji moguć. Od tog skupa vektora uzimamo sve vektore čiji je drugi najveći višak θ_2 najmanji, i tako ponavljamo. Ako je duljina vektora viškova konačna, naš algoritam će završiti u konačno mnogo vremena i rezultirati u imputaciji koja je i nukleolus.

Počnimo prvo sa primjerom:

Primjer 2.21

Promatramo TU-igru v sa skupom igrača $N = \{1, 2, 3, 4\}$:

$$v(S) := \begin{cases} 20, & S = N \\ 8, & S = \{1, 2\} \\ 8, & S = \{3, 4\} \\ 4, & S = \{1\} \\ 2, & S = \{3\} \\ 0, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Vidimo da su $\{1,2\}$ i $\{3,4\}$ disjunktni. Možemo lako pronaći neki vektor takav da je višak za te skupove -2, a za ostale najviše -2. Takav vektor je npr. $(6,4,5,5)$. To je očito i najmanji maksimalni višak (od svih imputacija) jer bismo povećali višak skupa $\{1,2\}$ ako smanjimo višak za $\{3,4\}$ (zbog efikasnosti imputacija), i obrnuto. Tada definiramo X_1 kao:

$$X_1 = \{x \in I(v) \,|\, \theta_1(x) = -2\} \tag{2.5.2}$$

Također vrijedi $X_1 = X_2$ jer se višak od -2 postiže istovremeno za koaliciju $\{1,2\}$ i $\{3,4\}$. Vidimo da te koalicije formiraju uravnotežen skup (disjunktne), što je konzistentno sa Kohlbergovim kriterijem. Ako gledamo druge viškove, možemo vidjeti da će najveći među njima biti barem jednako veliki kao neki višak jednočlanih koalicija. Uzimajući to u obzir, drugi najveći višak možemo naći minimalan α sa uvjetima:

$$\begin{aligned} 8 - x_1 - x_2 &= -2 \\ 8 - x_3 - x_4 &= -2 \\ 4 - x_1 &\leq \alpha \\ -x_2 &\leq \alpha \\ 2 - x_3 &\leq \alpha \\ -x_4 &\leq \alpha. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Primjetimo da prve dvije jednadžbe zapravo osiguravaju da će prvi (najveći) višak ostati nepromjenjen. Taj sustav možemo napisati i kao:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 10 \\ x_3 + x_4 &= 10 \\ x_1 &\geq 4 - \alpha \\ x_2 &\geq -\alpha \\ x_3 &\geq 2 - \alpha \\ x_4 &\geq -\alpha \end{aligned} \tag{2.5.4}$$

U prvu jednakost uvrštavamo prve dvije nejednakosti i dobivamo $\alpha \geq -3$. U drugu jednakost uvrštavamo zadnje dvije nejednakosti i dobivamo $\alpha \geq -4$. Budući da smo htjeli minimizirati α tako da vrijede svi uvjeti, rješenje je $\alpha = -3$. To znači da ćemo fiksirati višak koalicija $\{1\}$ i $\{2\}$ te da će nukleolus igraču 1 donesti vrijednost 7 ($x_1 = 7$), a igraču 2 vrijednost 3 ($x_2 = 3$). Treći korak nam je minimizirati α uz uvjete:

$$\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 10 \\ x_3 &\geq 2 - \alpha \\ x_4 &\geq -\alpha. \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Ispustili smo jednadžbe u kojima se nalaze x_1 i x_2 jer više nemamo nikakvih uvjeta vezanih za njih. Slijedi da je rješenje $\alpha = -4$, što povlači $x_3 = 6$ i $x_4 = 4$. Dakle, (pra)nukleolus zadane igre je:

$$\nu(v) = \nu^*(v) = (7, 3, 6, 4). \tag{2.5.6}$$

Zanimljivo je primjetiti da, iako igrač 4 na prvi pogled nije u boljoj poziciji od igrača 2, dobiva veću vrijednost u nukleolusu. To je zato što je igrač 4 grupiran sa igračem 3, koji ima manju individualnu *vrijednost* od igrača 1, s kojim je grupiran igrač 2. Zbog toga igrač 4 dobiva veći dio *kolača* veličine 10 kojeg mora podijeliti sa igračem 3, od igrača 2 koji kolač iste veličine dijeli sa igračem 1.

Ovaj primjer nas uvodi u način dobivanja nukleolusa na sistematičan način.

Korolar 2.22 (Algoritam za računanje (generaliziranog) nukleolusa)**.** *Neka je (N, v) TU-igra. Da bismo mogli izračunati generalizirani nukleolus $\mathcal{N}(N, v, X)$ za kompaktan poliedarski skup $X \subseteq \mathbb{R}^N$, ograničen sustavom linearnih (ne)jednadžbi, počinjemo rješavanjem idućeg linearnog programa:*

$$\begin{aligned} \alpha &\longrightarrow min \\ x(S) + \alpha \geq v(S),\ &\forall \emptyset \neq S \in 2^N,\ x \in X \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

Označimo rješenje tog programa sa α_1 te sa X_1 skup točaka $x_1 \in X$ u kojima se postiže minimum.
Ako je $|X_1| = 1$, slijedi da je $\mathcal{N}(N, v, X) = X_1$.
U suprotnom, označimo sa $\mathcal{B}_1$ skup svih koalicija S takvih da je $e(S, x, v) = \alpha_1,\ \forall x \in X_1$ i riješimo linearni program:

$$\begin{aligned} \alpha &\longrightarrow min \\ x(S) + \alpha \geq v(S),\ &\forall \emptyset \neq S \in 2^N \setminus \mathcal{B}_1,\ x \in X_1 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

Nastavljamo proceduru iterirajućim postupkom te dolazimo do jedinstvene točke, tj. generaliziranog nukleolusa igre v s obzirom na skup X.

Napomena: Za nukleolus igre (N, v) možemo definirati problem sa:

$$\begin{aligned} t &\longrightarrow min \\ e(S, x) &\leq t,\ \forall S \subseteq N \\ x(N) &= v(N) \\ x_i &\geq v(i),\ \forall i \in N \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

Primjer 2.23

Neka je $N = \{1, 2, 3, 4\}$ te neka vrijedi:

$$v(S) := \begin{cases} 100, & S = N \\ 95, & S = \{1, 2, 3\} \\ 85, & S = \{1, 2, 4\} \\ 80, & S = \{1, 3, 4\} \\ 55, & S = \{2, 3, 4\} \\ 50, & S = \{i, j\},\ i \neq j \\ 0, & S = \{i\},\ \forall i \in N \end{cases} \tag{2.5.10}$$

Minimiziramo α uz uvjete:

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & + & \alpha & \geq & 95 \\ x_1 & + & x_2 & & & + & x_4 & + & \alpha & \geq & 85 \\ x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & + & \alpha & \geq & 80 \\ & & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \alpha & \geq & 55 \\ & & & & x_i & + & x_j & + & \alpha & \geq & 50 \\ & & & & x_i & + & x_j & + & \alpha & \geq & 50 \\ & & & & x_i & & & + & \alpha & \geq & 0 \end{array}$$

za svake $i, j \in N$ takve da je $i \neq j$.

Dobijemo rješenje $\alpha_1 = 10$, koje se postiže u skupu X_1 zadanim sa

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 60, \\ x_1 &\geq 30, \\ x_2 &\geq 25, \\ x_2 &= 25, \\ x_4 &= 15 \end{aligned}$$

te uz

$$\mathcal{B}_1 = \{123, 124, 34\}.$$

koji je, u skladu s teoremom, uravnotežen skup.

Slijedi da je drugi linearni program jednak:

$$\alpha \longrightarrow min$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & & + & x_3 & + & x_4 & + & \alpha & \geq & 80 \\
 & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & \alpha & \geq & 55 \\
x_1 & & + & x_3 & & & + & \alpha & \geq & 50 \\
x_1 & & & & + & x_4 & + & \alpha & \geq & 50 \\
 & x_2 & + & x_3 & & & + & \alpha & \geq & 50 \\
 & x_2 & & & + & x_4 & + & \alpha & \geq & 50 \\
 & & & & & x_i & + & \alpha & \geq & 0 \\
 & & & & & & & x & \in & X_1,
\end{array}$$

za svaki $i \in N$. Možemo ga još pojednostavniti, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\alpha &\rightarrow min \\
x_1 + \alpha &\geq 40 \\
x_2 + \alpha &\geq 35 \\
x_1 + x_2 &= 60 \\
x_1 &\geq 30 \\
x_2 &\geq 25.
\end{aligned}$$

Rješenje te zadaće je $\alpha_2 = 7.5$ uz $x_1 = 32.5$, $x_2 = 27.5$. Dakle, pranukleolus igre je

$$\nu(N, v) = \nu^*(N, v) = (32.5, 27.5, 25, 15), \tag{2.5.11}$$

i vrijedi $\mathcal{B}_1 = \{123, 124, 34\}$, $\mathcal{B}_2 = \{134, 234\}$. Po Kohlbergovom teoremu možemo provjeriti da smo doista našli pranukleolus igre.

Bibliografija

[1] P. Hans: *Game Theory: A Multi-Leveled Approach*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008.

[2] T. Driessen: *Cooperative Games, Solutions and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1988.

[3] M. Maschler, E. Solan, S. Zamir: *Game Theory*, Cambridge University Press, 2013.

[4] L. Čaklović: *Geometrija linearnog programiranja*, Element, 2010.

Sažetak

Koalicijske igre su igre u kojima promatramo moguće koalicije igrača te njihove potencijalne isplate, uz pretpostavke da postoje dogovori koji se ne mogu kršiti i da se isplate mogu slobodno prenositi između članova koalicije u bilo kojem omjeru.

U prvom dijelu započinjemo sa definiranjem imputacija te definiramo pojam dominacije. Preko tih pojmova definiramo dominacijsku jezgru i jezgru neke koalicijske igre. One predstavljaju moguća rješenja igre u smislu koje će se koalicije formirati i za koje se distribucije isplate igrači nemaju razloga buniti. Pokazujemo uvjete za koje vrijedi da je jezgra neprazna te pokazujemo da je dominacijska jezgra jednaka jezgri ako je vrijednost velike koalicije (koalicije svih igrača) veća od sume vrijednosti neke manje koalicije i vrijednosti ostalih jednočlanih. Dalje definiramo jednostavne igre, karakteriziramo njihovu jezgru preko skupa veto igrača te pokazujemo u kojim je slučajevima jezgra jednostavne igre jednaka dominacijskoj. Uvodimo i pojam stabilnog skupa kao alternativno rješenje igre, pokazujemo vezu stabilnih skupova i jezgre te diskutiramo probleme stabilnih skupova. Također uvodimo pojam uravnoteženog skupa i njemu pridruženog uravnoteženog preslikavanja. Dokazujemo Bondareva-Sharpleyjev teorem koji govori o nepraznosti jezgre za uravnotežene igre.

U drugom dijelu želimo dobiti jedinstvenu točku u jezgri, što ćemo postići definiranjem pranukleolusa i nukleolusa kao točke za koju su maksimalni viškovi najmanji, gdje je višak zapravo razlika između vrijednosti samostalne koalicije i vrijednosti koju toj koaliciji pridružuje neka distribucija isplate. Uvodimo leksikografski uređaj kao mjeru usporedbe distribucija s obzirom na maksimalne viškove. Poslije toga se bavimo egzistencijom i jedinstvenosti nukleolusa. Također pokazujemo za koje je uvjete pranukleolus jednak nukleolusu. Na kraju pokazujemo Kohlbergov kriterij za pranukleolus te iskazujemo metodu računanja nukleolusa i pranukleolusa rješavanjem zadaća linearnog programiranja.

Summary

Coalitional games are games in which we observe possible coalitions between players and their potential pay-off. We assume that binding agreements exist and that pay-offs can be freely distributed among the members of a coalition in any way desired.

In the first section we define imputations and the concept of domination. Those are the basic concepts which we will use to define the core and domination core. They represent the possible solutions to a game: which coalitions will be formed and what will be the pay-off distribution. We show the conditions for which the core is non-empty and that the domination core is equal to the core if the worth of the grand coalition (a coalition of which every player is a member) is greater than the sum of worth of any other coalition and the rest of individual worths. Then we define simple games, we show a characterization of their core via the set of veto players and we give exact conditions in which the core of a simple game is equal to the domination core. We introduce stable sets as an alternative solution to a game, we show the connection between the stable sets and the core and we discuss the differences. We also introduce balanced sets and balanced maps. Then we prove the Bondareva-Sharpley theorem which states that the core of a balanced game is non-empty.

In the second section we try to get a unique point in the core, which we will accomplish by defining prenucleolus and nucleolus via excess. We define excess as the difference between the worth of a coalition and the worth which a distribution vector assigns to the said coalition. We introduce lexicographic order as a means of comparsion of different vectors and their respective excess. Then we discuss the existence and uniqueness of the nucleolus. We show which conditions have to hold for the nucleolus to be equal to the prenucleolus. Finally, we derive the Kohlberg criterion for the prenucleolus, and show the method to compute the (pre)nucleolus based on solving a sequence of linear programs.

Životopis

Davor Šibenik rođen je 20. lipnja 1993. godine u Bjelovaru. Završio je IV. osnovnu školu Bjelovar, a zatim opći smjer Gimnazije Bjelovar. Preddiplomski studij matematike upisuje 2012. godine na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu te ga završava 2015. godine, čime stječe akademsku titulu sveučilišnog prvostupnika matematike (bacc. univ. math.). Iste godine upisuje diplomski studij Financijska i poslovna matematika.